ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ
ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
12 май 2007

ТЕМА ВТОРА

Задача 1. а) Седмият член на аритметична прогресия е равен на $5,25$, а сумата на първите седем члена на тази прогресия е равна на $31\frac{1}{2}$. Да се намерят първият член и разликата на прогресията .

б) Да се реши уравнението $\log_2\left[\log_{0,5}\left(x^2+2x+1\right)\right]=1$.

Задача 2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$(a-1)3^{2x+1}-(4a+2)3^x+a+1=0$$

има два реални корена, чието произведение е отрицателно число.

Задача 3. В правоъгълника $ABCD$ страната AB е три пъти по-малка от страната BC. Нека F е вътрешна точка за правоъгълника $ABCD$, като $BF=\sqrt{17}, CF=\sqrt{2}$ и $DF=1$.

а) Да се намери синусът на ъгъла DCF.

б) Да се намери отношението на лицето на четириъгълника $ABFD$ и лицето на триъгълника DCF.

Задача 4. Центровете на две сфери с радиуси равни на 1 лежат на височината на прав кръгов конус. Едната сфера се допира до околната повърхнина на конуса, а другата се допира до нея и до основата на конуса. Да се намери радиусът на основата на конуса, при който обемът му е най-малък.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 5 АСТРОНОМИЧЕСКИ ЧАСА.

Разпределението на точките в задачите е както следва:
Зад. 1.а)- 4 точки, Зад.1.б)- 6 точки, Зад. 2. - 10 точки,
Зад. 3.а)- 5 точки, Зад.3.б)- 5 точки, Зад. 4. - 10 точки.

НА ВСИЧКИ КАНДИДАТ-СТУДЕНТИ ПОЖЕЛАВАМЕ УСПЕХ!

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ
ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
12 май 2007г.

ТЕМА ВТОРА

УКАЗАНИЯ

за точкуване на кандидатстудентските писмени работи
по МАТЕМАТИКА

Задача 1. Общо 10 точки

а)	1.	Намерен е първият член на аритметичната прогресия .	2
а)	2.	Намерена е разликата на аритметичната прогресия .	2
б)	1.	Определени са стойностите на x, за които уравнението има смисъл.	3
б)	2.	Намерени са решенията на логаритмичното уравнение.	3

Задача 2. Общо 10 точки

1.	Направено е полагането $t = 3^x$ и е получено квадратно уравнение.	2
2.	Разгледан е случаят $a = 1$.	1
3.	Получена е система неравенства за параметъра a, при които корените на квадратното уравнение са положителни и 1 е между тях.	4
4.	Намерени са търсените стойности на параметъра a.	3

Задача 3. Общо 10 точки

а)	1.	Въведени са неизвестни (страна и ъгъл) и е получена система за тях.	2
а)	2.	Решена е ситемата и е намерен търсеният синус.	3
б)	1.	Намерено е лицето на $\triangle DCF$	2
б)	2.	Намерено е лицето на четириъгълника $ABFD$.	2
б)	3.	Намерено е търсеното отношение.	1

Задача 4. Общо 10 точки

1.	Изразен е обемът на конуса като функция на една променлива и е определена дефиниционната й област.	4
2.	Изследвано е поведението на функцията в дефиниционната й област.	4
3.	Намерен е радиусът на основата на конуса, при който обемът на конуса е най-малък.	2

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ
ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
12 май 2007 г.

ТЕМА ВТОРА
ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1. а) Седмият член на аритметична прогресия е равен на $5,25$, а сумата на първите седем члена на тази прогресия е равна на $31\frac{1}{2}$. Да се намерят първият член и разликата на прогресията.

б) Да се реши уравнението $\log_2\left[\log_{0,5}\left(x^2+2x+1\right)\right]=1$.

Решение: а) От формулата за сума на първите седем члена на аритметичната прогресия $S_7=\frac{a_1+a_7}{2}.7$ намираме първия член $a_1=3,75$. От формулата $a_7=a_1+6.d$ намираме търсената разлика $d=0,25$.

б) Уравнението има смисъл, при $x\in M$, където M се определя от

$$\left|\begin{array}{l}(x+1)^2>0\\ \log_{0,5}(x+1)^2>0\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x\neq-1\\ (x+1)^2<1\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x\neq-1\\ x(x+2)<0\end{array}\right.\Rightarrow M=(-2;-1)\cup(-1;0).$$

Последователно получаваме $\log_{0,5}(x+1)^2=2$ и $(x+1)^2=(0,5)^2$. Решенията на последното уравнение са $x_1=-1,5$ и $x_2=-0,5$. Тъй като $x_1\in M$ и $x_2\in M$, то това са търсените решения на даденото уравнение.

Задача 2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$(a-1)3^{2x+1}-(4a+2)3^x+a+1=0$$

има два реални корена, чието произведение е отрицателно число.

Решение: Полагаме $3^x=t,\ t>0$ и получаваме квадратното уравнение

(1) $\quad 3(a-1)t^2-2(2a+1)t+a+1=0$.

Тъй като при $a=1$ уравнението (1) има един корен, то $a=1$ не е решение на задачата. При $a\neq1$ уравнението (1) има корени $t_1=\frac{1}{3}$ и $t_2=\frac{a+1}{a-1}$. От $3^{x_1}=\frac{1}{3}$ следва, че $x_1=-1$. Тъй като по условие $x_1.x_2<0$, то следва, че $x_2>0$, т.е. $t_2>1$.

Тогава решаваме неравенството $\frac{a+1}{a-1}>1$, откъдето намираме $a\in(1;\infty)$.

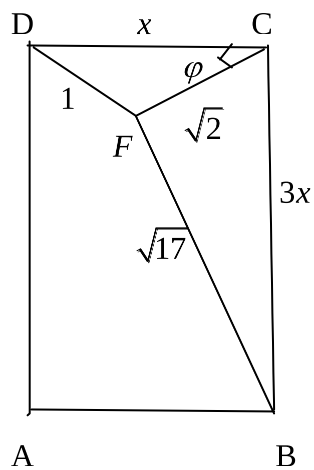
.

Забележка: Задачата може да се реши и чрез условията за разположение на корените на уравнението (1) в случая, когато те са положителни и единицата е между тях.

Задача 3. В правоъгълника $ABCD$ страната AB е три пъти по-малка от страната BC. Нека F е вътрешна точка за правоъгълника $ABCD$, като $BF=\sqrt{17}, CF=\sqrt{2}$ и $DF=1$.

а) Да се намери синусът на ъгъла DCF.

б) Да се намери отношението на лицето на четириъгълника $ABFD$ и лицето на триъгълника DCF.



Черт.1

Решение: а) Нека $\varphi=\angle DCF$, $\varphi\in\left(0^0;90^0\right)$ и $AB=DC=x$ (черт.1) и тогава $\angle BCF=90^0-\varphi$, $AD=BC=3x$. От косинусовата теорема за $\triangle DCF$ и $\triangle FCB$ получаваме системата

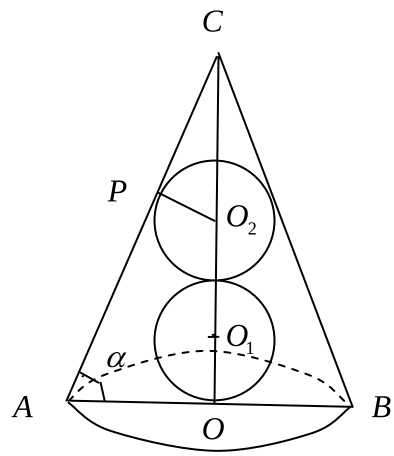
$$\left|\begin{array}{l}1=2+x^2-2\sqrt{2}.x\cos\varphi\\ 17=2+9x^2-6\sqrt{2}.x\cos\left(90^0-\varphi\right)\end{array}\right..$$

Понеже $\cos\left(90^0-\varphi\right)=\sin\varphi$, то от първото уравнение определяме $\cos\varphi=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{2}.x}$, а от второто $\sin\varphi=\dfrac{3x^2-5}{2\sqrt{2}.x}$ и като използваме основното тригонометрично равенство $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, за неизвестното x получаваме биквадратното уравнение $5x^4-18x^2+13=0$. Тъй като $x>0$, то решенията му са $x_1=1$ и $x_2=\sqrt{\dfrac{13}{5}}$. При $x=1$ имаме $\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0$ и тогава остава само решението $x=\sqrt{\dfrac{13}{5}}$. Пресмятаме

$$\sin\varphi = \frac{3x^2-5}{2\sqrt{2}.x} = \frac{3.\frac{13}{5}-5}{2\sqrt{2}.\sqrt{\frac{13}{5}}} = \frac{7}{\sqrt{130}}.$$

б) Пресмятаме $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{9}{\sqrt{130}}$. За лицето S_1 на $\triangle DCF$ имаме $S_1 = \frac{1}{2}x\sqrt{2}\sin\varphi = \frac{7}{10}$. За лицето S_2 на $\triangle BCF$ имаме $S_2 = \frac{1}{2}3x\sqrt{2}\sin\left(90^0-\varphi\right) = \frac{27}{10}$. Тогава лицето S_3 на четириъгълника $ABFD$ е $S_3 = S_{ABCD} - S_1 - S_2 = 3x^2 - S_1 - S_2 = \frac{44}{10}$. Търсеното отношение е $\frac{S_3}{S_2} = \frac{44}{7}$.

Задача 4. Центровете на две сфери с радиуси равни на 1 лежат на височината на прав кръгов конус. Едната сфера се допира до околната повърхнина на конуса, а другата се допира до нея и до основата на конуса. Да се намери радиусът на основата на конуса, при който обемът му е най-малък.



Черт.2

Решение: Означаваме $CO = h$, $h > 4$ и $AO = R$ (черт.2). Обемът на конуса е $V = \frac{1}{2}\pi R^2 h$. Тъй като $OO_2 = 3$, то $h = 3 + CO_2$. От $\triangle AOC \sim \triangle PO_2C$ получаваме $\frac{PO_2}{AO} = \frac{CO_2}{AC} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{h-3}{\sqrt{R^2+h^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{h^2}{(h-3)^2-1}$. Тогава обемът като функция на височината е $V(h) = \frac{1}{3}\pi\frac{h^3}{(h-4)(h-2)}$. Дефиниционната област на функцията $V = V(h)$ е $h \in (4;\infty)$. Търсим интервалите на растене и намаляване на функцията

$V(h)$. Намираме първата производна $V'(h)=\frac{1}{3}\pi\frac{h^2(h^2-12h+24)}{\left(h^2-6h+8\right)^2}$. От

$V'(h)=0 \Rightarrow h_1=0, h_2=6-2\sqrt{3}, h_3=6+2\sqrt{3}$ и намираме, че за $h\in\left(4;6+2\sqrt{3}\right)$ функцията $V=V(h)$ намалява, а за $h\in\left(6+2\sqrt{3};\infty\right)$ тя расте. Следователно най-малката стойност на функцията $V=V(h)$ при $h\in(4;\infty)$ се получава при $h=6+2\sqrt{3}$. Най-малкият обем на конуса е $V\left(6+2\sqrt{3}\right)=4\pi\sqrt{3}$.Пресмятаме $R=\frac{h}{\sqrt{(h-4)(h-2)}}=\sqrt{3\left(\sqrt{3}-1\right)}$ и това е търсената стойност.

Забележка: Забележка: Нека $\angle CAO=\alpha$. Тогава $O_2C=\frac{1}{\cos\alpha}$ и $h=\frac{1+3\cos\alpha}{\cos\alpha}$. Обемът като функция на α е $V(\alpha)=\frac{1}{3}\pi\frac{(1+3\cos)^3}{\cos\alpha\sin^2\alpha}, \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Като положим $\cos\alpha=x,\ x\in(0;1)$ получаваме функцията $V(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{(1+3x)^3}{x\left(1-x^2\right)}$.

Аналогично на горното решение намираме, че най-малката стойност на тази функция се достига при $x=\frac{\sqrt{12}-3}{3}\in(0;1)$.

Пресмятаме $\sin\alpha=\sqrt{1-x^2}=2\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}$. Тогава $R=\frac{1+3\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sqrt{3\left(\sqrt{3}-1\right)}$ и това е търсената стойност.