ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - СОФИЯ

ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА - 8 април 2023 г.

ПЪРВА ЧАСТ

Всяка от следващите 20 задачи има само един верен отговор. Преценете кой от предложените пет отговора на съответната задача е верен. Върху талона за отговори от теста (последната страница) заградете с овал и нанесете кръстче върху тази буква, която считате, че съответства на правилния отговор. Например: $\otimes$

За всеки верен отговор получавате по 1 точка. За грешен или непопълнен отговор, както и за посочени повече от един отговори на една задача, точки не се дават и не се отнемат.

1. Стойността на израза $\left(\sqrt{5}+2\right)^2+\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$ е:

а) $10-\sqrt{5}$, б) $10+3\sqrt{5}$, в) $10+\sqrt{5}$, г) $10-3\sqrt{5}$, д) $8+5\sqrt{5}$.

2. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2+6x-3=0$, то стойността на израза $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$ е:

а) $\dfrac{10}{3}$, б) 4, в) $\dfrac{14}{3}$, г) $-\dfrac{14}{3}$, д) -4.

3. Ако $S_5=40$ е сумата на първите пет члена на аритметична прогресия a_n, за която $a_1=7$, то разликата на прогресията е:

а) $\dfrac{1}{2}$, б) $\dfrac{5}{2}$, в) $\dfrac{3}{2}$, г) $\dfrac{9}{5}$, д) $\dfrac{33}{2}$.

4. Ако числата $3, a, b, 375$, взети в този ред, образуват геометрична прогресия, то $(b-a)$ е равно на:

а) 20, б) 30, в) 45, г) 60, д) 75.

5. Ако $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{1}{3}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$, то стойността на $\sin\alpha$ е:

а) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, б) $\dfrac{-3\sqrt{10}}{10}$, в) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, г) $\dfrac{-\sqrt{10}}{10}$, д) $\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$.

6. Стойността на израза $\log_2 32 - \log_5 0,2 - \log_9 27$ е:

а) 18, б) $\dfrac{21}{2}$, в) $\dfrac{15}{2}$, г) $\dfrac{9}{2}$, д) 3.

7. Решенията на уравнението $\sqrt{x-2} = x - 4$ са:

а) 3, б) 3 и 6, в) 6, г) 11, д) 2 и 4.

8. Решението на неравенството $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{9 - x^2} \geq 0$ е:

а) $x \in (-3; 3)$, б) $x \in (-3; 4]$, в) $x \in (3; 4]$,
г) $x \in (-3; 3) \cup [4; \infty)$, д) $x \in (-3; 3) \cup (3; 4]$.

9. Ако (x, y) е решение на системата $\left| \begin{array}{l} x - y = 6 \\ x^3 - y^3 = 72 \end{array} \right.$, то произведението xy е равно на:

а) 8, б) -8, в) 2, г) -2, д) 4.

10. Броят на целите числа, които удовлетворяват неравенството $|3x - 2| \leq 6$, е:

а) 0, б) 1, в) 2, г) 3, д) 4.

11. Ако $a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2 + 3n + 8}}{3n + 7}$, то a е равно на:

а) 1, б) 3, в) 8, г) $\dfrac{8}{7}$, д) $\dfrac{2}{3}$.

12. Ако средната стойност на 38 числа е 7, то сумата на тези числа е:

а) 348, б) 266, в) 126, г) 96, д) 46.

13. В урна има 6 еднакви топки, номерирани с числата от 1 до 6. При последователно изваждане на всички топки от урната вероятността номерата да образуват намаляваща редица е:

а) $\dfrac{1}{6}$, б) $\dfrac{1}{24}$, в) $\dfrac{1}{120}$, г) $\dfrac{1}{720}$, д) 1.

14. В таблицата са дадени измерените в $^\circ C$ най-ниски температури през първите 10 дни на месец декември.

$^\circ C$	0	-2	4	6	5	1
брой дни	1	3	2	1	2	1

Медианата на тези температури е:

а) 5°, б) 4°, в) 3°, г) $2,5^\circ$, д) 2°.

15. Решението на уравнението $\left(\frac{1}{2}\right)^{14-5x} = 64$ е:

а) $x = -4$, б) $x = -\frac{8}{5}$, в) $x = \frac{8}{5}$, г) $x = 5$, д) $x = 4$.

16. На пода на клетката на маймуните в един зоопарк има стълба, която поставена на пода се опира на стената вдясно на височина 4 m, а от същото място се опира на стената вляво на височина 3 m. Ако двете положения на стълбата са перпендикулярни, то дължината на стълбата е:

а) 4 m, б) 3 m, в) 5 m, г) 7 m, д) 8 m.

17. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ с бедра $AC = BC = 6$ cm и височина $CH = 2$ cm ($H \in AB$). Радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е:

а) 9 cm, б) 18 cm, в) 12 cm, г) 4 cm, д) 2 cm.

18. В правилна триъгълна пирамида основният ръб е 7 cm, а околната повърхнина е 168 cm^2. Косинусът на двустенния ъгъл при основата на пирамидата е:

а) $\frac{7\sqrt{3}}{16}$, б) $\frac{7\sqrt{3}}{32}$, в) $\frac{7\sqrt{3}}{96}$, г) $\frac{7\sqrt{3}}{6}$, д) $\frac{1}{6}$.

19. Осните сечения на прав кръгов конус образуват прав ъгъл при върха му. Отношението на радиусите на описаната и вписаната спрямо конуса сфера е:

а) 2, б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, в) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, г) $\sqrt{2}-1$, д) $1+\sqrt{2}$.

20. Квадратното уравнение $ax^2 + ax + a - 1 = 0$ има реални корени за всяка стойност на реалния параметър a, принадлежаща на интервала:

а) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{4}{3}; \infty\right)$, б) $\left[0; \frac{4}{3}\right]$, в) $\left(0; \frac{4}{3}\right]$, г) $\left[0; \frac{4}{3}\right)$, д) $[0; 1)$.

ВТОРА ЧАСТ

Следващите 10 задачи са без избираем отговор. Върху талона за отговорите от теста (последната страница) в празното поле за отговор на съответната задача запишете само отговора, който сте получили. За всеки получен и обоснован отговор получавате по 2 точки. За грешен отговор или за непопълнен отговор точки не се дават и не се отнемат.

21. Да се реши уравнението $4^x - 9 \,.\, 2^x - 22 = 0$.

22. Да се реши неравенството $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x^2 - 2x) \geq -2$.

23. Да се намерят корените на тригонометричното уравнение:

$$2(1 + \cos x)\sin^2\frac{x}{2} = 3\sin x - 2.$$

24. За числовите редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са в сила равенствата $a_n = 2b_{n+1} + 1$ за всяко естествено число $n \geq 1$ и $b_n = 2b_{n-1} - 1$ за всяко естествено число $n \geq 2$, като $b_1 = 2$. Намерете първите три члена на редицата $\{a_n\}$.

25. В успоредник $ABCD$ е дадено, че $\measuredangle BAD = 60^\circ$. Радиусът на описаната около $\triangle ABD$ окръжност е $\sqrt{19}$ cm, а радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$ cm. Намерете синуса на ъгъла, който сключват диагоналите на $ABCD$.

26. В ромб $ABCD$ с остър $\measuredangle BAD = \alpha$ височината BH пресича диагонала AC в т. M. Намерете отношението $BM : MH$, ако $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.

27. Дадени са n точки, никои три от които не лежат на една права. Всеки две точки са свързани с отсечка. Ако броят на отсечките е равен на модата на данните $1; 10; 7; 3; 10; 11; 18; 10; 5,$ намерете числото n.

28. С помощта на цифрите 1, 2, 3, 4, 5 са написани всички възможни цели положителни числа с различни цифри. Да се намери вероятността случайно избрано число да е по-малко от 400 и да се дели на 3.

29. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които неравенствата $\sqrt{x^2 - 1} > x$ и $x + m \leq 0$ са равносилни.

30. Правоъгълен триъгълник е разположен така, че хипотенузата му лежи в равнината μ, а катетите му сключват с тази равнина ъгли с големина α и β. Да се определи синусът на ъгъла между равнината на триъгълника и равнината μ.

ОТГОВОРИ

Кандидат-студентски конкурс по математика

в Технически университет – София

8 април 2023 г.

ПЪРВА ЧАСТ

1 д	**2 в**	**3 а**	**4 г**	**5 г**	**6 г**	**7 в**	**8 д**	**9 б**	**10 д**
11 д	**12 б**	**13 г**	**14 г**	**15 д**	**16 в**	**17 а**	**18 в**	**19 д**	**20 в**

ВТОРА ЧАСТ

21. $x = \log_2 11$.
22. $x \in [-1; 0) \cup (2; 3]$.
23. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$.
24. 7; 11; 19.
25. $\frac{56\sqrt{19}}{247}$.
26. $3 : \sqrt{5}$.
27. $n = 5$.
28. $\frac{1}{13}$.
29. $m = 1$.
30. $\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$.